ThS. NGUYỄN VĂN DŨNG

MỚI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

- Dành cho thí sinh lớp 12 ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài.
- Biên soạn theo nội dung và định hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. NGUYỄN VĂN DŨNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

- ✔ Dành cho thí sinh lớp 12 ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài.
- ✔ Biên soạn theo nội dung và định hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
BÍCH HẠNH
Sửa bài
DIÊN NGUYÊN
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG
Mã số: 1L-376H2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 626-2010/CXB/09-101ĐHQGHN, ngày 25/06/2010
Quyết định xuất bản số: 376LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Khởi đầu từ nhu cầu giải quyết các phương trình đại số, số phức đã bắt đầu xuất hiện từ thế kỷ thứ *XVI* và phát triển mạnh đến nay. ứng dụng của số phức không chỉ ở đại số nói riêng hay toán học nói chung, mà còn trong nhiều ngành khoa học khác.

Số phức được đưa vào giảng dạy ở bậc phổ thông của nhiều nước trên thế giới, nhưng lại là nội dung mới với học sinh trung học ở Việt Nam, và thực sự đã gây không ít khó khăn bởi nguồn tài liệu tham khảo hạn chế, hoặc nếu có thì cũng chưa đáp ứng được với mong muốn. Vì thế tôi biên soạn cuốn sách "Phương pháp giải toán số phức và ứng dụng" với ba phần:

Phần thứ nhất. Những vấn đề cơ bản về số phức.

Phần thứ hai. Một số ứng dụng của số phức.

Phần thứ ba. Các bài toán chọn lọc.

Với 223 ví dụ và bài tập được trình bày từ cơ bản đến nâng cao; từ nội dung bám sát sách giáo khoa, ôn luyện thi tốt nghiệp, cao đẳng và đại học, đến những vấn đề khó phù hợp với các kỳ thi học sinh giỏi ... Tác giả tin rằng, các đối tượng học sinh đều có thể tìm thấy những điều thú vị trong cuốn sách này.

Cuốn sách được hoàn thành với sự giúp đỡ nhiệt tình của các biên tập viên (...), sự động viên góp ý của gia đình và những người bạn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Mặc dù rất tâm huyết biên soạn cuốn sách một cách công phu, kỹ lưỡng nhưng không thể tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ:

- Trung tâm Sách giáo dục Anpha
225C Nguyễn Tri phương, P.9, Q5. Tp. HCM
- Công ti Sách - thiết bị giáo dục Anpha
50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân phú, Tp. HCM
ĐT:08.62676463, 38547464
Email: alphabookcenter@yahoo.com

Trân trọng cảm ơn !

TÁC GIẢ

Phần thứ nhất

NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ SỐ PHỨC

Nội dung được trình bày theo sát sách giáo khoa, bài tập được phân dạng cụ thể, phong phú với 45 ví dụ và 30 bài tập tự luyện có gợi ý và đáp số.

1 - DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

1.1. Định nghĩa

Số phức là số có dạng $z = x + yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo ($i^2 + 1 = 0$), x gọi là phần thực của số phức z (ký hiệu là $\operatorname{Re} z$) và y gọi là phần ảo của số phức z (ký hiệu là $\operatorname{Im} z$).

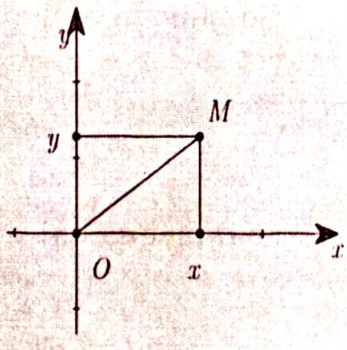
Nếu $y = 0$ thì số phức $z = x + 0i$ là số thực.

Nếu $x = 0$ thì số phức $z = 0 + yi$ là số thuần ảo.

Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ bằng nhau khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

1.2. Biểu diễn hình học của số phức

Xét mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x, y)$. Như vậy, số thực được biểu diễn trên trục Ox, nên Ox gọi là trục thực; số ảo được biểu diễn trên trục Oy, nên Oy gọi là trục ảo. Mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn số phức gọi là mặt phẳng phức.



Hình 1.1

1.3. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức $z = x + yi$ là $\overline{z} = x - yi$.

Vì $\overline{\overline{z}} = z$ nên z và $\overline{z}$ là hai số phức liên hợp của nhau (các điểm biểu diễn của chúng đối xứng qua trục thực Ox).

Số phức z là số thực khi và chỉ khi $z = \overline{z}$, là số ảo khi và chỉ khi $z = -\overline{z}$.

b) Môđun của số phức

Môđun của số phức $z = x + yi$ là số thực không âm $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rõ ràng $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên $|z| = |\overline{z}|$, $|z|^2 = z.\overline{z}$.

1.4. Các phép toán trên tập số phức

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$.

a) Phép cộng số phức

Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

Số đối của số phức $z = x + yi$ là $-z = -x - yi.$

b) Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$

c) Phép nhân số phức

Tích của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$

d) Phép chia số phức

Số phức nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}.\overline{z}.$

Với $z = x + yi (x^2 + y^2 \neq 0)$ thì $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}.i.$

Thương của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ ($z_2 \neq 0$) là số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Các ví dụ về tính toán và chứng minh

Sử dụng các phép tính số phức, điều kiện hai số phức bằng nhau ...

Chú ý:

+ Với mọi số nguyên dương n thì

$i^{4n} = (i^2)^{2n} = 1; i^{4n+1} = (i^2)^{2n}.i = i$

$i^{4n+2} = (i^2)^{2n+1} = -1; i^{4n+3} = (i^2)^{2n+1} i = -i.$

+ Với mọi số phức z thì $z.\overline{z} = |z|^2.$

Ví dụ 1.1. Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau

a) $5+2i+9(2+i)-i$

b) $(3+2i)(3-2i)+5(1+2i)+2i^5$

c) $(1+i)^8$

d) $(1-i)^{14}$

e) $(3-i)^{16}(1+2i)^{16}$

f) $\dfrac{(2-3i)(3+i)^2}{6+17i}$

Lời giải.

a) Ta có $z=5+2i+9(2+i)-i=5+2i+18+9i-i=23+10i$ nên số phức z có phần thực là $\operatorname{Re} z=23$ và phần ảo $\operatorname{Im} z=10$.

b) Vì $i^5=i^4.i=(i^2)^2.i=i$ và $(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=13$ nên ta có

$z=(3+2i)(3-2i)+5(1+2i)+2i^5=13+5+10i+2i=18+12i.$

Do đó số phức z có phần thực là $\operatorname{Re} z=18$ và phần ảo $\operatorname{Im} z=12$.

c) Ta có $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$ nên $(1+i)^8=(2i)^4=16(i^2)^2=16$. Vậy số phức $z=(1+i)^8$ có $\operatorname{Re} z=16$, $\operatorname{Im} z=0$.

d) Vì $(1-i)^2=-2i$ nên $(1-i)^{14}=(-2i)^7=-128(i^2)^3 i=128i.$

Vậy số phức $z=(1-i)^{14}$ có $\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z=128$.

e) Vì $(3-i)(1+2i)=5(1+i)$ nên

$z=(3-i)^{16}(1+2i)^{16}=5^{16}(1+i)^{16}=5^{16}(2i)^8=5^{16}2^8(i^2)^4=5^{16}2^8.$

Vậy $\operatorname{Re} z=5^{16}2^8, \operatorname{Im} z=0$.

f) Do $(3+i)^2=9+6i+i^2=8+6i$ nên

$$z=\frac{(2-3i)(3+i)^2}{6+17i}=\frac{(2-3i)(8+6i)}{6+17i}=\frac{34-12i}{6+17i}=\frac{-2i(17i+6)}{6+17i}=-2i.$$

Vậy số phức z có $\operatorname{Re} z=0; \operatorname{Im} z=-2$.

Ví dụ 1.2. Tìm các số thực x, y thoả mãn

a) $x(2-3i)^2+(2y+1)(1+i)^3=-5(7+10i)$

b) $(2x+i)(3+i)^2-(x-2y)(i-2)^3=18+76i$

Lời giải.

a) Vì $(2-3i)^2=-5-12i; (1+i)^3=-2+2i$ nên ta có

$x(-5-12i)+(2y+1)(-2+2i)=-35-50i$

$\Leftrightarrow -5x-4y-2-(12x-4y-2)i=-35-50i\ (*)$

Các số thực x, y thoả mãn (*) khi và chỉ khi x, y là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} -5x-4y-2=-35 \\ 12x-4y-2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=33 \\ 12x-4y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy các số thực cần tìm là $(x;y)=(5;2)$.

b) Ta có $(3+i)^2=8+6i; (i-2)^3=-2+11i$ suy ra

$$(2x+i)(3+i)^2-(x-2y)(i-2)^3=18+76i$$
$$\Leftrightarrow (2x+i)(8+6i)-(x-2y)(-2+11i)=18+76i$$
$$\Leftrightarrow 18x-4y-6+(x+22y+8)i=18+76i$$

Vì thế $\begin{cases} 18x-4y-6=18 \\ x+22y+8=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x-4y=24 \\ x+22y=68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy giá trị cần tìm là $(x;y)=(2;3)$.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng các số phức sau là số thực

a) $z=\dfrac{(1+3i)^3(4-3i)^2}{(2+i)^2(3+80i+i^3)}$ b) $z=\dfrac{(3+\sqrt{2}i)^2(\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2}i)^2}-\dfrac{19}{3i}$

Lời giải.

a) Vì $i^3=i.i^2=-i$ nên ta có

$$(1+3i)^3=1+9i+27i^2+27i^3=-26-18i$$

$$3+80i+i^3=3+79i; (4-3i)^2=7-24i; (2+i)^2=3+4i.$$

Do đó $z=\dfrac{(1+3i)^3(4-3i)^2}{(2+i)^2(3+80i+i^3)}=\dfrac{(-26-18i)(7-24i)}{(3+4i)(3+79i)}=\dfrac{-614+498i}{-307+249i}=2.$

Vậy $z=2$ nên đó là số thực.

b) Ta có $(3+\sqrt{2}i)^2=7+6\sqrt{2}i; (1+\sqrt{2}i)^2=-1+2\sqrt{2}i$. Suy ra

$$z=\frac{(3+\sqrt{2}i)^2(\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2}i)^2}-\frac{19}{3i}=\frac{(7+6\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-i)}{-1+2\sqrt{2}i}-\frac{19i}{3i^2}=\frac{13\sqrt{2}+5i}{-1+2\sqrt{2}i}+\frac{19i}{3}$$
$$=\frac{(13\sqrt{2}+5i)(1+2\sqrt{2}i)}{(-1+2\sqrt{2}i)(1+2\sqrt{2}i)}+\frac{19i}{3}=\frac{3\sqrt{2}+57i}{-9}+\frac{19i}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Do đó số phức đã cho là số thực.

Ví dụ 1.4. Cho số phức $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Tính $\overline{z}; \dfrac{1}{z}; z^3; (\overline{z})^2;\ z^2-z+1;\ \left(1-z^6\right)^{2010}$.

Lời giải

Ta có $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ nên $\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vì $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ nên $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$z^3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\frac{1}{8}+3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}i+3.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3=-1.$$

$$(\overline{z})^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ta có $z^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ nên

$$z^2-z+1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0.$$

Mà $1+z^3=(1+z)(1-z+z^2)=0$ nên $1-z^6=(1-z^3)(1+z^3)=0$.

Do đó ta có $(1-z^6)^{2010}=0$.

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

b) $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (với z_2 khác 0)

d) $|z_1.z_2|=|z_1||z_2|$

e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

Lời giải

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$ với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$.

a) Ta có $\overline{z}_1=x_1-y_1i$ và $\overline{z}_2=x_2-y_2i$ nên

$\overline{z}_1+\overline{z}_2=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i$.

Mà $z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\Rightarrow\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i$.

Vậy $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$.

b) Ta có $\overline{z}_1.\overline{z}_2=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$ và

$z_1.z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\Rightarrow\overline{z_1.z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$.

Từ đó suy ra $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

c) Vì $z_2\overline{z_2} = |z_2|^2$ là số thực, nên ta có $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)} = \frac{\overline{z_1\overline{z_2}}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}z_2}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

d) *Cách 1:* Ta có $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ và $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Suy ra $|z_1||z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2}$ (1)

Mặt khác $z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$, do đó

$|z_1z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Vì $|z|^2 = z\overline{z}$, nên $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$.

Từ đó ta có $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.

Nhận xét. Sử dụng khéo léo phép biến đổi số phức liên hợp cho lời giải ngắn gọn.

e) Vì $|\overline{z_2}| = |z_2|$ nên $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right| = \left|\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right| = \frac{|z_1\overline{z_2}|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1||\overline{z_2}|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1||z_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Ví dụ 1.6. Cho hai số phức z_1 và z_2. Chứng minh rằng

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

b) $|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}\\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\\ &= 2(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - \overline{z_1}z_2)\overline{(1 - \overline{z_1}z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}\\ &= (1 - \overline{z_1}z_2)(1 - z_1\overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\\ &= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \ (1)\end{aligned}$$